Lisans Yerleştirme Sınavı – 1 (Lys – 1) / 16 Haziran 2012

Matematik Sorularının Çözümleri

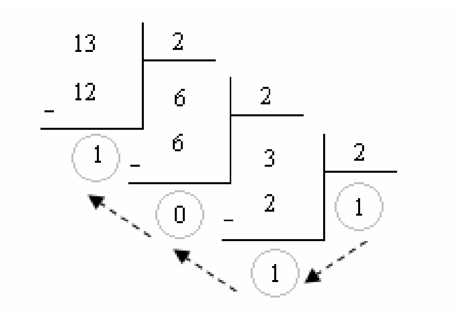
1. 8 sayı tabanında verilen $(15)_8$ sayısının 2 sayı tabanında yazılışı = ?

Bu durumda $(15)_8$ sayısı önce 10 tabanına çevrilir. Sonra 2 tabanında yazılır.

$$(15)_8 = 1.8^1 + 5.8^0$$

$$= 8 + 5$$

$$= 13$$



Buna göre

$(15)_8 = (1101)_2$ elde edilir.

2. $\dfrac{16^3}{24^3+16^3+8^3} = \dfrac{(2.8)^3}{(3.8)^3+(2.8)^3+8^3}$

$$= \frac{2^3.8^3}{3^3.8^3+2^3.8^3+8^3}$$

$$= \frac{2^3.8^3}{8^3.(3^3+2^3+1)}$$

$$= \frac{2^3}{(3^3+2^3+1)}$$

$$= \frac{8}{27+8+1}$$

$$= \frac{8}{36}$$

$$= \frac{2}{9}$$

3. $\dfrac{3^x}{2^{2x}} = \dfrac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad 5^{\frac{1}{x}} = ?$

$$\frac{3^x}{2^{2x}} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{3^x}{4^x} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{1}{5}$$

Eşitliğin her iki tarafının $\dfrac{1}{x}$ inci kuvveti alınırsa,

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3} = (5)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad 5^{\frac{1}{x}} = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

4. $x=\sqrt[4]{5}$ olduğuna göre, $(x^2-2)^{-1}=?$

$$(x^2-2)^{-1}=\frac{1}{x^2-2}$$

$$x=\sqrt[4]{5} \quad\Rightarrow\quad x=5^{\frac{1}{4}}$$

Eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$$\Rightarrow \quad x^2=\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2=5^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad x^2=\sqrt{5}$$

denklemde yerine yazılırsa

$\dfrac{1}{x^2-2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ olur. Eşleniği ile çarpıp bölersek,

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+2}{5-4}$$

$=\sqrt{5}+2$ bulunur.

5. $$\frac{x.(y+z)+z.(y-x)}{x^2+x.y+x.z+y.z}=\frac{x.y+x.z+z.y-z.x}{x.(x+y)+z.(x+y)}$$

$$=\frac{y.(x+z)}{(x+y).(x+z)}$$

$$=\frac{y}{x+y}$$

6. x ve y pozitif gerçel sayıları için

$x.y = 5$

$x^2 + y^2 = 15$ ise

$x^3 + y^3 = ?$

$(x+y)^3 = x^3 + 3.x^2.y + 3.x.y^2 + y^3$

$(x+y)^3 = x^3 + 3.x.y.(x+y) + y^3$ özdeşliğinden $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3.x.y.(x+y)$ bulunur.

Buradan

$(x+y)^2 = x^2 + 2.x.y + y^2 \quad \Rightarrow \quad (x+y)^2 = 25$

$\Rightarrow \quad x + y = \mp 5$

x ve y pozitif gerçel sayıları olduğundan, $x + y = 5$ olur.

$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3.x.y.(x+y)$

$x^3 + y^3 = 5^3 - 3.5.5$

$x^3 + y^3 = 50$ elde edilir.

7. x ve y birer gerçel sayı olmak üzere,

$x^2 - 4y = -7$

$y^2 - 2x = 2$ ise

$x + y = ?$

$x^2 - 4y + 7 = 0$

$y^2 - 2x - 2 = 0$ Eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1$ ve $y = 2$

Buna göre

$x + y = 1 + 2 = 3$ olur.

8. x bir gerçel sayı olmak üzere

$$\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^x = 4 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^x = ?$$

$\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^x = a$ olsun.

$\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^x = 4$ Eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^x.\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^x = a.4 \quad \Rightarrow \quad \left[\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\right]^x = a.4$$

$$\Rightarrow \quad \left[\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right]^x = a.4$$

$$\Rightarrow \quad [7-3]^x = a.4$$

$$\Rightarrow \quad 4^x = a.4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4^x}{4} = a$$

$$\Rightarrow \quad a = 4^{x-1}$$

Dolayısıyla

$\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^x = a = 4^{x-1}$ olur.

9. Birler basamağında A rakamı bulunan iki basamaklı tüm doğal sayıların toplamı 504 olduğuna göre, A = ?

1A + 2A + 3A + 4A + 5A + 6A + 7A + 8A + 9A = 504

(1.10 + A) + (2.10 + A) + (3.10 + A) + ... + (9.10 + A) = 504

[10.(1 + 2 + 3 + ... + 9)] + 9A = 504

$$10.\left(\frac{9.(9+1)}{2}\right) + 9A = 504$$

9A = 54

A = 6 elde edilir.

10.

$$2^a.3^b \equiv 0 \pmod{12}$$

$$2^b.3^a \equiv 0 \pmod{27}$$

denkliklerinin her ikisini de aynı anda sağlayan a ve b pozitif tam sayıları için $a+b$ toplamı <u>en az</u> kaçtır?

$2^a.3^b \equiv 0 \pmod{12} \quad \Rightarrow \quad 2^a.3^b = 12.k$

$k = 1$ ise

$2^a.3^b = 2^2.3^1 \quad \Rightarrow \quad a = 2$ ve $b = 1$

$k = 2$ ise

$2^a.3^b = 2^3.3^1 \quad \Rightarrow \quad a = 3$ ve $b = 1$

. . . .

$2^b.3^a \equiv 0 \pmod{27} \quad \Rightarrow \quad 2^b.3^a = 27.k$

$k = 1$ ise

$2^b.3^a = 2^0.3^3 \quad \Rightarrow \quad a = 3$ ve $b = 0$

$k = 2$ ise

$2^b.3^a = 2^1.3^3 \quad \Rightarrow \quad a = 3$ ve $b = 1$

Buna göre, $(a+b)_{\min} = 3+1 = 4$ bulunur.

11. $1 < n < 50$ olmak üzere, pozitif bölenlerinin sayısı 3 olan kaç tane n tam sayısı vardır?

$n = a^p.b^r.c^s$ farklı asal çarpanlarının çarpımı şeklinde olsun.

n sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısı, $(p+1).(r+1).(s+1)$ dir.

Buna göre

Pozitif bölenlerinin sayısı 3 olduğundan,

$(p+1).(r+1).(s+1) = 3$

$p+1=3$

$p=2$

$r=0$

$s=0$ olur.

Dolayısıyla

$n = a^2$

O zaman n, a asal sayısının karesi olur.

$1 < n < 50 \quad \Rightarrow \quad 1 < a^2 < 50$

$n = 2^2$

$n = 3^2$

$n = 5^2$

$n = 7^2$

12. x, y birer gerçel sayı ve $-1 < y < 0 < x$ olduğuna göre,

I. $x + y > 0 \quad \rightarrow \quad -$

II. $x - y > 1 \quad \rightarrow \quad -$

III. $x.(y+1) > 0 \quad \rightarrow \quad +$

ifadelerinden hangileri <u>her zaman</u> doğrudur?

$x = \dfrac{1}{2}$ ve $y = \dfrac{-1}{2}$ olsun.

$x + y = 0$

$x - y = 1$ olduğundan, I ve II ifadeleri her zaman doğru değildir.

$x > 0$ ve $y + 1 > 0$ olduğundan, III ifadesi her zaman doğrudur.

13. Gerçel sayılar kümesi üzerinde Δ işlemi, her a ve b gerçel sayısı için

$a \Delta b = a^2 + 2^b$

biçiminde tanımlanıyor.

2 Δ (1 Δ x) = 12 olduğuna göre, x kaçtır?

$1 \Delta x = 1^2 + 2^x \quad \Rightarrow \quad 1 \Delta x = 1 + 2^x$

$2 \Delta (1 + 2^x) = 2^2 + 2^{1+2^x} \quad \Rightarrow \quad 2^2 + 2^{1+2^x} = 12$

$\Rightarrow \quad 2^{1+2^x} = 2^3$

$\Rightarrow \quad 1 + 2^x = 3$

$\Rightarrow \quad 2^x = 2$

$\Rightarrow \quad x = 1$ elde edilir.

14. Z tam sayılar kümesi olmak üzere, $f : Z \to Z$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre,

I. f bire birdir. $\to$ +

II. f örtendir. $\to$ –

III. f 'nin görüntü kümesi $Z \setminus \{0\}$ 'dır. $\to$ –

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I ve III

$f(0) = 1$

$f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 5$, . . .

$f(-1) = -2$, $f(-2) = -3$, $f(-3) = -4$, $f(-4) = -5$, . . .

x 'in her farklı değeri için $f(x)$ farklı bir değer aldığından, f bire birdir.

Görüntü kümesinde 0 ve – 1 oluşmadığından, f örten değildir.

Görüntü kümesi : $Z \setminus \{-1 , 0\}$ olacaktır.

15.

$$f(x) = |2x-5|$$

$$g(x) = |x+1|$$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $(gof)(x) = 3$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

$$(gof)(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad g\big(f(x)\big) = 3$$

$$\Rightarrow \quad g\big(|2x-5|\big) = 3$$

$$\Rightarrow \quad \big||2x-5|+1\big| = 3$$

$$|2x-5|+1 = 3 \quad \Rightarrow \quad |2x-5| = 2$$

$$\Rightarrow \quad 2x-5 = 2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2x-5 = -2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

$$|2x-5|+1 = -3 \quad \Rightarrow \quad |2x-5| = -4 \quad \rightarrow \quad \varnothing$$

Buna göre, x değerlerinin toplamı : $\frac{7}{2}+\frac{3}{2}$ = 5 elde edilir.

16. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu, her x gerçel sayısı için

$$f(x) < f(x+2)$$

eşitsizliğini sağlıyor.

Buna göre,

I. $f(1) < f(5)$

II. $|f(-1)| < |f(1)|$

III. $f(0) + f(2) < 2.f(4)$

ifadelerinden hangileri <u>her zaman</u> doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III D) II ve III E) I, II ve III

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \text{ ise } f(1) < f(3) \\ \\ x=3 \text{ ise } f(3) < f(5) \end{array}\right\} \quad f(1) < f(5) \quad \rightarrow \quad +$$

Örneğin, $f(x) = x - 5 \quad \Rightarrow \quad -6 < -4$

$$\Rightarrow \quad |-6| < |-4| \quad \Rightarrow \quad 6 < 4 \text{ olur.}$$

Bu yüzden $|f(-1)| < |f(1)|$ için bir şey söylenemez. $\rightarrow$ $-$

$f(0) < f(2)$

$f(2) < f(4)$

$f(0) + f(2) < f(2) + f(4)$

$f(2) < f(4)$

Eşitsizliğin her iki tarafına $f(4)$ eklenirse

$f(2) + f(4) < f(4) + f(4)$

$f(0) + f(2) < f(2) + f(4) < f(4) + f(4) \quad \Rightarrow \quad f(0) + f(2) < 2.f(4) \quad \rightarrow \quad +$

17. Bir öğrenci, doğru olduğunu düşündüğü aşağıdaki iddiayı ispatlarken bir hata yapmıştır.

İddia:

A, B, C herhangi kümeler olmak üzere, $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ 'dir.

Öğrencinin ispatı:

$A \setminus (B \cap C)$ kümesinin her elemanının $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ kümesinde olduğunu gösterirsem ispat biter.

Şimdi, $x \in A \setminus (B \cap C)$ alalım.

(I) Buradan $x \in A$ ve $x \notin (B \cap C)$ olur.

(II) Buradan $x \in A$ ve ($x \notin B$ ve $x \notin C$) olur.

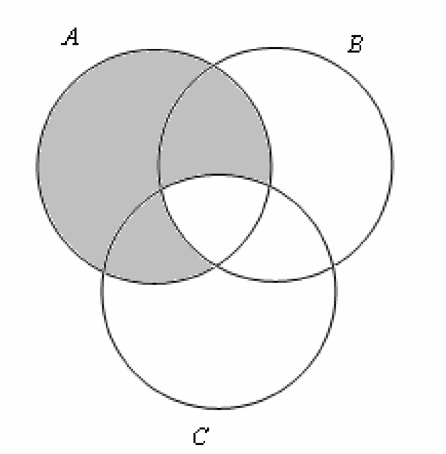
(III) Buradan ($x \in A$ ve $x \notin B$) ve ($x \in A$ ve $x \notin C$) olur.

(IV) Buradan $x \in A \setminus B$ ve $x \in A \setminus C$ olur.

(V) Buradan $x \in [(A \setminus B) \cap (A \setminus C)]$ olur.

Bu öğrenci, numaralandırılmış adımların hangisinde hata yapmıştır?

A) I B) II C) III D) IV E) V



$A \setminus (B \cap C)$

$x \in A \setminus (B \cap C)$ alınmıştır.

Buna göre

(II) Buradan $x \in A$ ve ($x \notin B$ ve $x \notin C$) olur. $\rightarrow$ Hata yapmıştır.

18. a ve b birer pozitif tam sayı olmak üzere,

$$P(x) = (x+a).(x+b)$$

polinomunun katsayılarının toplamı 15 olduğuna göre, $a+b$ toplamı kaçtır?

$P(1) = 15 \quad \Rightarrow \quad P(1) = (1+a).(1+b) = 15$

$$= 15.1 = 1.15 = 3.5 = 5.3$$

$\Rightarrow \quad (a+1).(b+1) = 15.1 \quad \Rightarrow \quad a+1 = 15$ ve $b+1 = 1$

$a = 14 \qquad b = 0$

$\Rightarrow \quad (a+1).(b+1) = 1.15 \quad \Rightarrow \quad a+1 = 1$ ve $b+1 = 15$

$a = 0 \qquad b = 14$

a ve b birer pozitif tam sayı olacağına göre,

$\Rightarrow \quad (a+1).(b+1) = 3.5 \quad \Rightarrow \quad a+1 = 3$ ve $b+1 = 5$

$a = 2 \qquad b = 4$

$\Rightarrow \quad (a+1).(b+1) = 5.3 \quad \Rightarrow \quad a+1 = 5$ ve $b+1 = 3$

$a = 4 \qquad b = 2$

Buna göre, $a+b = 2+4 = 6$ elde edilir.

19.

$$P(x)=x^2-2x+m$$

$$Q(x)=x^2+3x+n$$

polinomları veriliyor.

Bu iki polinom ortak bir köke sahip ve $P(x)$ polinomunun kökleri eşit olduğuna göre, $m+n$ toplamı kaçtır?

$P(x)$ polinomunun kökleri eşit olduğuna göre, $\Delta = 0$ olmalıdır.

$P(x)=x^2-2x+m \quad \Rightarrow \quad (-2)^2-4.1.m=0$

$\Rightarrow \quad m=1$ bulunur.

$P(x)=x^2-2x+1 \quad \Rightarrow \quad P(x)=(x-1)^2$

$P(x)$ polinomunun kökü :

$(x-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$ olur.

Bu iki polinom ortak bir köke sahip olduğundan,

$Q(1)=0 \quad \Rightarrow \quad 1^2+3.1+n=0$

$\Rightarrow \quad n=-4$ olur.

Buna göre, $m+n=1+(-4)=-3$ bulunur.

20. $y = x^2 - 2.(a+1).x + a^2 - 1$ parabolü $y = 1$ doğrusuna teğet olduğuna göre, a = ?

I. Yol

Ortak çözümden parabol ile doğrunun kesişim noktası hesaplanır.

$x^2 - 2.(a+1).x + a^2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2.(a+1).x + a^2 - 2 = 0$

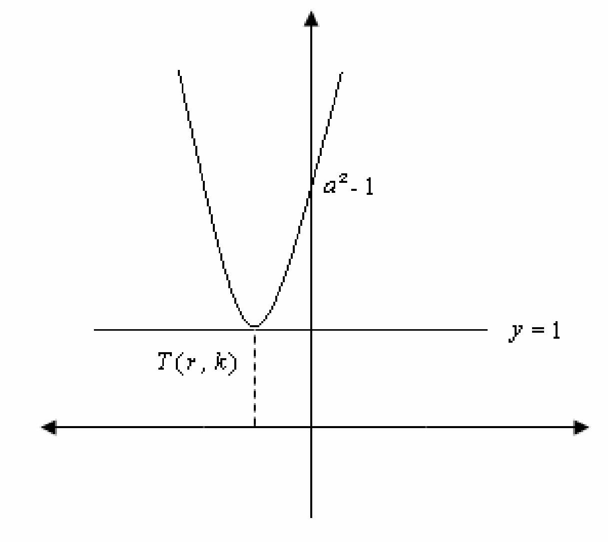
$\Delta = 0$ olmalıdır.

$$\Rightarrow \quad [-2.(a+1)]^2 - 4.1.(a^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + 2a + 1 - a^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{-3}{2} \text{ elde edilir.}$$

II. Yol



$y = x^2 - 2.(a+1).x + a^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ için $y = a^2 - 1$ olur.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki parabollerin tepe noktası : $T(r, k)$ ise

Tepe noktasının apsisi : $r = \dfrac{-b}{2a}$

Tepe noktasının ordinatı : $k = f(r)$

olduğuna göre,

$y = f(x) = x^2 - 2.(a+1).x + a^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad r = a + 1$

$\Rightarrow \quad k = f(a+1) = 1$ bulunur.

$f(a+1) = 1$ olduğuna göre,

$f(a+1) = (a+1)^2 - 2.(a+1).(a+1) + a^2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (a+1).[(a+1) - 2(a+1) + (a-1)] = 1$

$\Rightarrow \quad -2.(a+1) = 1$

$\Rightarrow \quad a = \dfrac{-1}{2} - 1$

$\Rightarrow \quad a = \dfrac{-3}{2}$ bulunur.

21. Bir çiçekçide 5 farklı renkten çok sayıda gül ve 2 çeşit vazo vardır.
Bir müşteri, 2 farklı renkten toplam 3 gül ve 1 vazo satın almak istiyor.
Bu müşteri alışverişini kaç farklı şekilde yapabilir?

Renkler = A – B – C – D – E

Vazo = X – Y olsun.

$$\binom{5}{2}.2.\binom{2}{1} = \frac{5!}{(5-2)!.2!}.2.2$$

$$= 10.4$$

= 40 farklı şekilde yapabilir.

22. Bir torbada 5 kırmızı ve 4 beyaz bilye vardır.
Bu torbadan aynı anda rastgele 3 bilye çekildiğinde her bir renkten <u>en fazla</u> 2 bilye olma olasılığı kaçtır?

I. Yol

3 bilye çekildiğinde bir renkten en fazla 2 bilye olması demek;
3'ününde kırmızı veya beyaz olmaması demektir.

Buna göre

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{5}{3}+\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{5}{6} \text{ elde edilir.}$$

II. Yol

Kırmızı bilye $\rightarrow$ 5

Beyaz bilye $\rightarrow$ 4

$$\text{İstenen olasılık} = \frac{\binom{5}{2}.\binom{4}{1} + \binom{5}{1}.\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}}$$

$$= \frac{\frac{5!}{(5-2)!.2!}.4 + 5.\frac{4!}{(4-2)!.2!}}{\frac{9!}{(9-3)!.3!}}$$

$$= \frac{10.4 + 5.6}{\frac{9.8.7}{6}}$$

$$= \frac{70}{84}$$

$$= \frac{5}{6}$$

23. $\dfrac{\cos 135 + \cos 330}{\sin 150} = ?$

$$\cos 135 = \cos(180 - 135) = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 330 = \cos(360 - 330) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 150 = \sin(180 - 150) = \sin 30 = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre,

$$\frac{\cos 135 + \cos 330}{\sin 150} = \frac{-\cos 45 + \cos 30}{\sin 30}$$

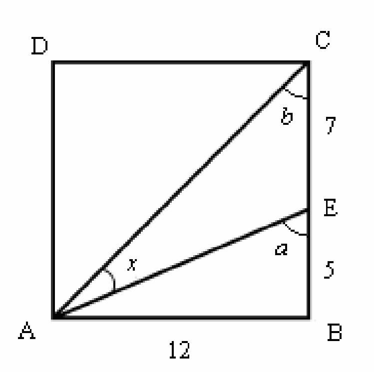
$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

24.

I. Yol



$\tan x = ?$

$b + x = a \quad \Rightarrow \quad x = a - b$

$\tan x = \tan(a - b)$

$$= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a . \tan b}$$

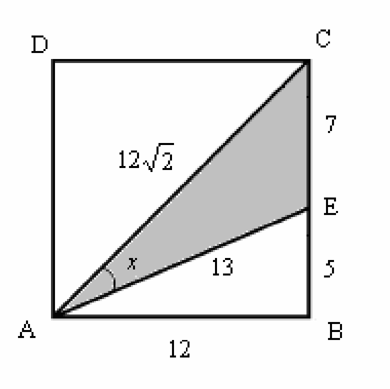
$$= \frac{\frac{12}{5} - \frac{12}{12}}{1 + \frac{12}{5} . \frac{12}{12}}$$

$$= \frac{\frac{12}{5} - 1}{1 + \frac{12}{5} . 1}$$

$$= \frac{\frac{7}{5}}{\frac{17}{5}}$$

$$= \frac{7}{17} \text{ elde edilir.}$$

II. Yol



$\tan x = ?$

AEC üçgeninin alanını iki değişik yoldan hesaplayabiliriz.

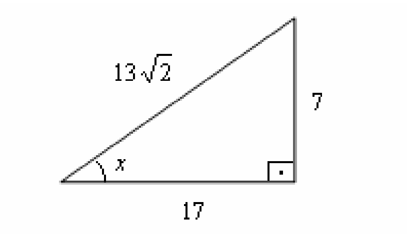
Birinci yol : $\dfrac{taban \times yukseklik}{2}$

İkinci yol : Herhangi iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açının verilmesi ile hesaplanır.

Buna göre

Alan(AEC) $\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}.13.12\sqrt{2}.\sin x = \dfrac{7.12}{2}$

$\Rightarrow \quad \sin x = \dfrac{7}{13\sqrt{2}}$



Buna göre, $\tan x = \dfrac{7}{17}$ olur.

25. $\cos x.\cos 2x = \dfrac{1}{16\sin x} \quad \Rightarrow \quad \sin 4x = ?$

$\cos x.\cos 2x = \dfrac{1}{16\sin x}$ içler – dışlar çarpımı yapılırsa

$16\sin x.\cos x.\cos 2x = 1$

$2.\sin x.\cos x = \sin 2x$ olduğuna göre,

$8.2.\sin x.\cos x.\cos 2x = 1$

$8.\sin 2x.\cos 2x = 1$

$2.\sin 2x.\cos 2x = \sin 4x$ olduğuna göre,

$4.2.\sin 2x.\cos 2x = 1$

$4.\sin 4x = 1$

$\sin 4x = \dfrac{1}{4}$ elde edilir.

26. $x^2-(\sin a).x-\frac{1}{4}.(\cos^2 a)=0$ denkleminin bir kökü $\frac{2}{3}$ ise $\sin a=?$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2-(\sin a).\frac{2}{3}-\frac{1}{4}.(\cos^2 a)=0$$

$$\frac{4}{9}-\frac{2.\sin a}{3}-\frac{\cos^2 a}{4}=0$$

$$16-24.\sin a-9.\cos^2 a=0$$

$\cos^2 a+\sin^2 a=1$ olduğuna göre,

$$16-24.\sin a-9.(1-\sin^2 a)=0$$

$$16-24.\sin a-9+9.\sin^2 a=0$$

$$9.\sin^2 a-24.\sin a+7=0$$

$$(3.\sin a-7).(3.\sin a-1)=0 \quad \Rightarrow \quad 3.\sin a-7=0 \quad \Rightarrow \quad \sin a=\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3.\sin a-1=0 \quad \Rightarrow \quad \sin a=\frac{1}{3}$$

Sonuç olarak

$-1\le \sin a\le 1$ olduğuna göre, $\sin a=\frac{7}{3}$ olamaz.

O halde $\sin a=\frac{1}{3}$ olur.

27. Karmaşık sayılar kümesi üzerinde $f(z) = 1 - 2.z^6$ fonksiyonu tanımlanıyor.

$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ için $f(z_0) = ?$

$$f(z_0) = 1 - 2.z_0{}^6$$

$$z_0{}^6 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^6$$

Bir karmaşık sayının kuvveti (De Moivre Formülü)'nden

$z = r.(\cos\theta + i.\sin\theta)$ ise

$z^n = r^n.(\cos n.\theta + i.\sin n.\theta)$, $n \in R$ olduğuna göre,

$$z_0{}^6 = \left(\cos\left(6.\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(6.\frac{\pi}{3}\right)\right) \Rightarrow z_0{}^6 = \left(\cos 2\pi + i.\sin 2\pi\right)$$

$$\Rightarrow z_0{}^6 = 1 + i.0$$

$$\Rightarrow z_0{}^6 = 1$$

$$f(z_0) = 1 - 2.z_0{}^6 \Rightarrow f(z_0) = 1 - 2.1$$

$\Rightarrow f(z_0) = -1$ elde edilir.

28. $(|z|+z).\left(|z|-\bar{z}\right)=i$

denklemini sağlayan z karmaşık sayılarının <u>sanal</u> kısmı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

I. Yol

$z=a+i.b$ olsun.

$b=?$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\bar{z}=a-i.b$ ise

$(|z|+z).\left(|z|-\bar{z}\right)=i$

$|z|^2-|z|.\bar{z}+z.|z|-z.\bar{z}=i$

$(a^2+b^2)-\sqrt{a^2+b^2}.(a-i.b)+(a+i.b).\sqrt{a^2+b^2}-(a+i.b).(a-i.b)=i$

$(a^2+b^2)-\sqrt{a^2+b^2}.a+i.b.\sqrt{a^2+b^2}+a.\sqrt{a^2+b^2}+i.b.\sqrt{a^2+b^2}-(a^2+b^2)=i$

$2.a.\sqrt{a^2+b^2}+i.2.b.\sqrt{a^2+b^2}=i$

Buna göre, z karmaşık sayılarının sanal kısmı

$2.b.\sqrt{a^2+b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad b=\dfrac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow \quad b=\dfrac{1}{2.|z|}$ olur.

II. Yol

$$\left(|z|+z\right).\left(|z|-\bar{z}\right)=i$$

$$|z|^2-|z|.\bar{z}+z.|z|-z.\bar{z}=i$$

$z.\bar{z}=|z|^2$ olduğundan

$$|z|^2-|z|.\bar{z}+z.|z|-|z|^2=i \quad \Rightarrow \quad -|z|.\bar{z}+z.|z|=i$$

$$\Rightarrow \quad |z|.(z-\bar{z})=i$$

$z=a+i.b$ olsun.

$b=?$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\bar{z}=a-i.b$ ise

$$\Rightarrow \quad ((a+i.b)-(a-i.b))=\frac{i}{|z|}$$

$$\Rightarrow \quad i.2.b=\frac{i}{|z|}$$

$$\Rightarrow \quad b=\frac{1}{2.|z|} \text{ elde edilir.}$$

29. 1 sayısına olan uzaklığı 2 birim ve i sayısına olan uzaklığı 3 birim olan $z = a + i.b$ karmaşık sayıları için $a - b$ farkı kaçtır?

$z = a + i.b$

$z_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 1 + i.0$

$|z - z_1| = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(a-1)^2 + (b-0)^2} = 2$

$\Rightarrow \quad a^2 - 2a + b^2 = 3$

$z_2 = i \quad \Rightarrow \quad z_2 = 0 + i.1$

$|z - z_2| = 3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(a-0)^2 + (b-1)^2} = 3$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 - 2b = 8$

$$\begin{array}{l} a^2 - 2a + b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 - 2b = 8 \\ \hline 2a - 2b = 5 \end{array}$$

$2a - 2b = 5 \quad \Rightarrow \quad a - b = \frac{5}{2}$ elde edilir.

30. $\log_2 3x + \log_4 x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = ?$

$\log_2 3x + \log_{2^2} x^2 = 2$

$\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}.\log_a b$ olduğuna göre,

$\log_2 3x + \dfrac{2}{2}.\log_2 x = 2$

$\log_2 3x + \log_2 x = 2$

$\log_a b + \log_a c = \log_a (b.c)$ olduğuna göre,

$\log_2 3x.x = 2$

$\log_2 3x^2 = 2$

$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$ olduğuna göre,

$3x^2 = 2^2$

$x^2 = \dfrac{4}{3}$

$x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

31. $2^x = \dfrac{1}{5}$ ve $3^y = \dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $x.y = ?$

$$2^x = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad 2^x = 5^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \ln 2^x = \ln 5^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad x.\ln 2 = -\ln 5$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-\ln 5}{\ln 2}$$

$$3^y = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 3^y = 2^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \ln 3^y = \ln 2^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad y.\ln 3 = -2.\ln 2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-2.\ln 2}{\ln 3}$$

Buna göre

$$x.y = \frac{-\ln 5}{\ln 2}.\frac{-2.\ln 2}{\ln 3} \quad \Rightarrow \quad x.y = \frac{2.\ln 5}{\ln 3}$$

$$\Rightarrow \quad x.y = \frac{\ln 5^2}{\ln 3}$$

$$\Rightarrow \quad x.y = \frac{\ln 25}{\ln 3}$$ elde edilir.

32. $\sum_{n=4}^{9}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)=?$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\left(\frac{1+1}{1}\right).\left(\frac{2+1}{2}\right).\left(\frac{3+1}{3}\right).\left(\frac{4+1}{4}\right)..........\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{1}\right).\left(\frac{3}{2}\right).\left(\frac{4}{3}\right).\left(\frac{5}{4}\right)..........\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=(n+1)$$

$$\sum_{n=4}^{9}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{n=4}^{9}(n+1)$$

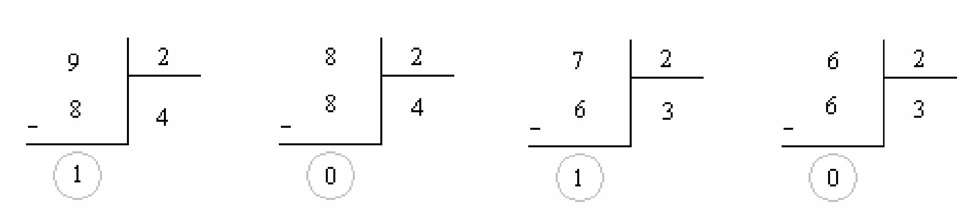
$$=(4+1)+(5+1)+(6+1)+(7+1)+(8+1)+(9+1)$$

$$=5+6+7+8+9+10$$

$= 45$ bulunur.

33. (a_n) dizisi

$$a_n = \begin{cases} 2^n + 1, & n \equiv 0 \pmod 2 \\ 2^n - 1, & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_9 - a_7}{a_8 - 4.a_6} = ?$$



$a_9 = 2^9 - 1$ $\qquad$ $a_8 = 2^8 + 1$ $\qquad$ $a_7 = 2^7 - 1$ $\qquad$ $a_6 = 2^6 + 1$

Buna göre

$$\frac{a_9 - a_7}{a_8 - 4.a_6} = \frac{2^9 - 1 - (2^7 - 1)}{2^8 + 1 - 4.(2^6 + 1)}$$

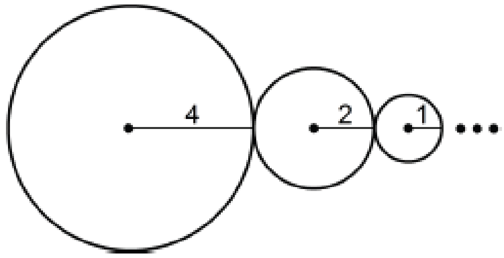
$$= \frac{2^9 - 1 - 2^7 + 1}{2^8 + 1 - 2^2.2^6 - 4}$$

$$= \frac{2^9 - 2^7}{2^8 + 1 - 2^8 - 4}$$

$$= \frac{2^7.(2^2 - 1)}{-3}$$

$= -2^7$ elde edilir.

34.



$a_1 = 2.\pi.4 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 8.\pi$

$a_2 = 2.\pi.2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 4.\pi$

$a_3 = 2.\pi.1 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 2.\pi$

. . . .
. . . .

O halde çemberlerin çevre uzunlukları toplamı

$Ç = a_1 + a_2 + a_3 + ... \quad \Rightarrow \quad Ç = 8\pi + 4\pi + 2\pi + ...$

Bu ise ilk terimi $a_1 = 8.\pi$ ve

ortak çarpanı $r = \dfrac{a_2}{a_1} \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{4.\pi}{8.\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{1}{2}$ olan geometrik seridir.

Buna göre

$$Ç = 8\pi + 4\pi + 2\pi + ... \quad \Rightarrow \quad Ç = 8\pi.(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...)$$

$$\Rightarrow \quad Ç = 8\pi.\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad Ç = 16\pi \text{ elde edilir.}$$

35. a, b ve c birer pozitif gerçel sayı olmak üzere,

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ matris eşitliği veriliyor.

$a+b+c=?$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a.a+b.0 & a.b+b.c \\ 0.a+c.0 & 0.b+c.c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a^2 & a.b+b.c \\ 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$c^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 2$

$a.b + b.c = 2 \quad \Rightarrow \quad 3.b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{2}{3}$

Buna göre

$a+b+c = 1 + \dfrac{2}{3} + 2 = \dfrac{11}{3}$ elde edilir.

36. Bir A matrisinin çarpma işlemine göre tersi A^{-1} olmak üzere,

$$[2 \quad 1].\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [a] \quad \Rightarrow \quad a = ?$$

$A.A^{-1} = I$ olduğuna göre,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = ?$$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ olsun.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1.a + 0.b & 1.c + 0.d \\ 3.a + 1.b & 3.c + 1.d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & c \\ 3a + b & 3c + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad a = 1$, $c = 0$, $b = -3$, $d = 1$ bulunur.

Buna göre, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

$$[2 \quad 1].\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [a] \quad \Rightarrow \quad [2 \quad 1].\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [a]$$

$$\Rightarrow \quad [2 \quad 1].\begin{bmatrix} 1.1 + 0.4 \\ -3.1 + 1.4 \end{bmatrix} = [a]$$

$$\Rightarrow \quad [2 \quad 1].\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [a]$$

$$\Rightarrow \quad [2.1 + 1.1] = [a]$$

$$\Rightarrow \quad [3] = [a]$$

$\Rightarrow \quad a = 3$ bulunur.

37. $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$(2A-B).\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(2.\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{bmatrix}4 & 6\\ 2 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{bmatrix}4-1 & 6-2\\ 2-0 & 4-5\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}3x+4y\\ 2x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

Buna göre doğrusal denklem sistemi : $\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ olur.

38. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2-\sqrt{4-x}}=?$

$x\to 0$ için $\dfrac{\sin 3.0}{2-\sqrt{4-0}}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

L'Hospital teoremi uygulanırsa

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)'}{\left(2-\sqrt{4-x}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3.\cos 3x}{\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}}=\frac{3.\cos 3.0}{\dfrac{1}{2\sqrt{4-0}}}=\frac{3}{\dfrac{1}{4}}=12 \text{ elde edilir.}$$

39. $\lim_{x\to 1^+} (x-1).\ln(x^2-1) = ?$

$x \to 1^+$ için $(1-1).(\ln(1^2-1)) = 0.\infty$ belirsizliği vardır.

$\lim_{x\to 1^+} (x-1).\ln(x^2-1) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(x^2-1)}{\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}$ olarak yazılırsa

$x \to 1^+$ için $\dfrac{\ln(1^2-1)}{\left(\dfrac{1}{1-1}\right)} = \dfrac{\infty}{\frac{1}{0}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

L'Hospital teoremi uygulanırsa

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\ln(x^2-1)\right)'}{\left(\dfrac{1}{x-1}\right)'} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\dfrac{2x}{x^2-1}}{\dfrac{-1}{(x-1)^2}} \right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2x}{x^2-1} . \frac{(x-1)^2}{-1} \right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2x}{(x-1).(x+1)} . \frac{(x-1).(x-1)}{-1} \right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2x}{x+1} . \frac{(x-1)}{-1} \right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2x-2x^2}{x+1} \right)$$

$$= \left(\frac{2.1-2.1^2}{1+1} \right)$$

$$= \frac{0}{2}$$

= 0 elde edilir.

40. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1 \text{ ve } \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{f(2x-1)+f(5-x)}{f(x^2-1)} = ?$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(2x-1)+f(5-x)}{f(x^2-1)} = \frac{f(2.2-1)+f(5-2)}{f(2^2-1)}$$

$$= \frac{f(3^+)+f(3^-)}{f(3^+)}$$

$$= \frac{1+2}{1}$$

$= 3$ bulunur.

41.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \le 1 \\ x^2 + a.x + b & , \quad 1 < x < 3 \\ 5 & , \quad x \ge 3 \end{cases}$$

fonksiyonu gerçel sayılar kümesinde sürekli olduğuna göre, $a-b=?$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \quad \Rightarrow \quad a+b+1=1$$

$$\Rightarrow \quad a=-b$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \quad \Rightarrow \quad 9+3a+b=5$$

$$\Rightarrow \quad 3a+b=-4$$

Buna göre $a=-2$ ve $b=2$ bulunur.

O halde

$a-b=-2-2=-4$ elde edilir.

42. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları için

$f(g(x)) = x^2 + 4x - 1$

$g(x) = x + a$

$f'(0) = 1$

$a = ?$

$f(x+a) = x^2 + 4x - 1 \quad \Rightarrow \quad 1.f'(x+a) = 2x + 4$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow \quad f'(x+a) = 2x + 4$

$x + a = 0$ ise $x = -a$

$f'(-a+a) = 2(-a) + 4 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -2a + 4$

$f'(0) = 1$ olduğuna göre,

$-2a + 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{3}{2}$ bulunur.

43. $f(2x+5)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad \Rightarrow \quad f^{/}(6)=?$

$2.f^{/}(2x+5)=\frac{\pi}{2}.\left(1+\tan^{2}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

$2x+5=6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$ için

$2.f^{/}(6)=\frac{\pi}{2}.\left(1+\tan^{2}\left(\frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad 2.f^{/}(6)=\frac{\pi}{2}.\left(1+\tan^{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\Rightarrow \quad 2.f^{/}(6)=\frac{\pi}{2}.(1+1)$

$\Rightarrow \quad 2.f^{/}(6)=\frac{\pi}{2}.2$

$\Rightarrow \quad f^{/}(6)=\frac{\pi}{2}$ bulunur.

44. Baş katsayısı 1 olan, üçüncü dereceden gerçel katsayılı bir $P(x)$ polinom fonksiyonunun köklerinden ikisi – 5 ve 2'dir.

$P(x)$'in $x=0$ noktasında bir yerel ekstremumu olduğuna göre, üçüncü kökü kaçtır?

$P(x)$ polinom fonksiyonunun üçüncü kökü = c olsun.

$a=1$

$x_1=-5$

$x_2=2$

$x_3=c$

$P(x)=a.(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3)$

$P(x)=1.(x+5).(x-2).(x-c)$

$P(x)=(x^2+3x-10).(x-c)$

$P(x)$'in $x=0$ noktasında bir yerel ekstremumu olduğuna göre, $P^{/}(0)=0$ olur.

$$P(x)=(x^2+3x-10).(x-c) \quad \Rightarrow \quad P^{/}(x)=(2x+3).(x-c)+1.(x^2+3x-10)$$

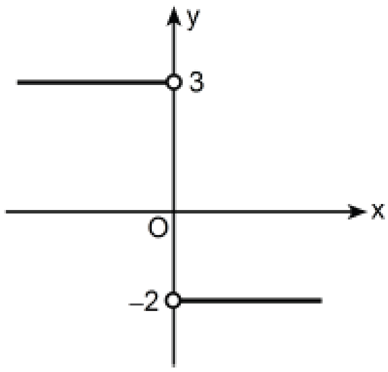
$$\Rightarrow \quad P^{/}(x)=2x^2-2x.c+3x-3c+x^2+3x-10$$

$$\Rightarrow \quad P^{/}(x)=3x^2+(6-2.c).x-3c-10$$

$$P^{/}(0)=3.0^2+(6-2.c).0-3c-10 \quad \Rightarrow \quad -3c-10=0$$

$$\Rightarrow \quad c=\frac{-10}{3} \text{ bulunur.}$$

45. Aşağıda, gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. $f(2) - f(1) = -2$ 'dir. $\rightarrow$ $+$

II. f fonksiyonunun $x = 0$ noktasında yerel maksimumu vardır. $\rightarrow$ $+$

III. İkinci türev fonksiyonu $x = 0$ noktasında tanımlıdır. $\rightarrow$ $-$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

$x > 0$ için $f'(x) = -2 \quad \Rightarrow \quad \int f'(x) = \int -2$

$\Rightarrow \quad f(x) = -2x + c_1$

$f(2) = -2.2 + c_1 \quad \Rightarrow \quad f(2) = -4 + c_1$

$f(1) = -2.1 + c_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{f(1) = -2 + c_1}$

$f(2) - f(1) = -2$ elde edilir.

$x < 0$ için $f'(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad \int f'(x) = \int 3$

$\Rightarrow \quad f(x) = 3x + c_2$

Ayrıca f fonksiyonu sürekli olduğundan, $c_1 = c_2$ dir.

. . . .

$x = 0$ kritik noktadır.

$x > 0$ için $f'(x) = -2 < 0$ olduğundan $f(x)$ azalandır.

$x < 0$ için $f'(x) = 3 > 0$ olduğundan $f(x)$ artandır.

Verilenlere göre $f'(x)$ 'in işaret tablosunu oluşturalım.

x		0	
$f'(x)$	+ + + +		− − − −
$f(x)$	↗		↘

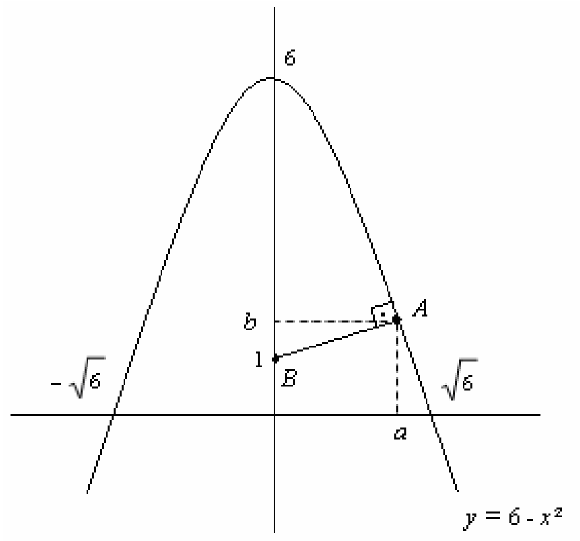
Bu nedenle f fonksiyonu $x = 0$ noktasında yerel maksimumu sahiptir.

. . . .

1. türevin tanımsız olduğu yerde 2. türevin tanımlı olması mümkün değildir.

46. $x > 0$ olmak üzere; $y = 6 - x^2$ eğrisinin grafiği üzerinde ve (0, 1) noktasına en yakın olan nokta (a, b) olduğuna göre, b kaçtır?

I. Yol



$y = 6 - x^2$ eğrisinin grafiği üzerinde ve $B(0,1)$ noktasına en yakın olan nokta $A(a,b)$ ise

$y = 6 - x^2 \quad \Rightarrow \quad b = 6 - a^2$

$A(a,b) = A(a, 6 - a^2)$ ve $B(0,1)$ ise

İki nokta arası uzaklıktan

$|AB| = \sqrt{(a-0)^2 + (6 - a^2 - 1)^2} \quad \Rightarrow \quad |AB| = \sqrt{a^2 + (5 - a^2)^2}$ olur.

Bu fonksiyonun en küçük değerini bulmamız gerekir.

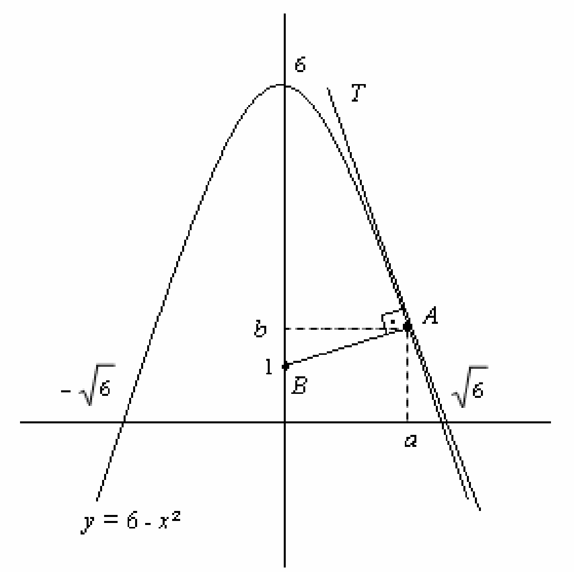
$$|AB|' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2a + 2.(5 - a^2).(-2a)}{2\sqrt{a^2 + (5 - a^2)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a.(1 - 10 + 2a^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a.(2a^2 - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ veya } a = \mp\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Buna göre $b = 6 - a^2$ olduğundan, $b = 6 - \dfrac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{3}{2}$ bulunur.

II. Yol



En yakın nokta olması için A noktasındaki teğet $AB \perp AT$ olmalıdır.

$y = 6 - x^2 \quad \Rightarrow \quad b = 6 - a^2$

Teğetin eğimi = $m_{AT} = y_a^{\prime} = -2a$

$A(a, b) = A(a, 6 - a^2)$ ve $B(0,1)$ ise

BA nın eğimi, iki noktası bilinen doğrunun eğiminden

$$m_{BA} = \frac{6 - a^2 - 1}{a - 0} \quad \Rightarrow \quad m_{BA} = \frac{5 - a^2}{a}$$

Dik doğruların eğimleri çarpımı – 1 olduğundan,

$$m_{BA}.m_{AT} = -1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{5 - a^2}{a}\right).(-2a) = -1$$

$$\Rightarrow \quad 2a^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{9}{2}$$

Buna göre $b = 6 - a^2$ olduğundan, $b = \dfrac{3}{2}$ bulunur.

47. $\int \frac{f^{/}(x)}{[f(x)]^2}dx = \int 2\,dx$ eşitliği veriliyor. $f(0)=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(3)=?$

$f(x)=u \quad \Rightarrow \quad f^{/}(x)\,dx = du$

$$\int \frac{f^{/}(x)}{u^2}\frac{du}{f^{/}(x)} = \int 2\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{u^2}du = \int 2\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int u^{-2}\,du = 2x + c_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + c_2 = 2x + c_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{u} + c_2 = 2x + c_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{u} = 2x + c_1 - c_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{u} = 2x + (c_1 - c_2) \quad \to \quad c_1 - c_2 = c \text{ diyelim.}$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{-1}{2x+c}$$

$f(x)=u$ olduğundan

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{-1}{2x+c}$$

$f(0)=\frac{1}{2}$ olduğuna göre,

$f(0) = \frac{-1}{2.0+c} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c=-2$ olur.

Buna göre

$f(x) = \frac{-1}{2x-2} \quad \Rightarrow \quad f(3) = \frac{-1}{2.3-2} = \frac{-1}{4}$ olarak hesaplanır.

48. $\int (\arcsin x)^2 \, dx$ integralinde $u = \arcsin x$ dönüşümü yapılırsa,

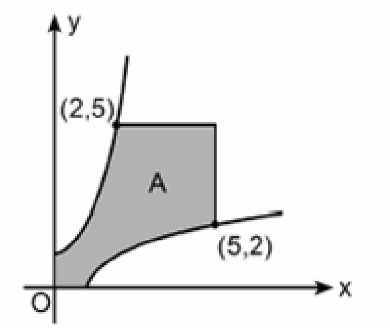
$u = \arcsin x$

$\sin u = x \quad \Rightarrow \quad \cos u \, du = dx$

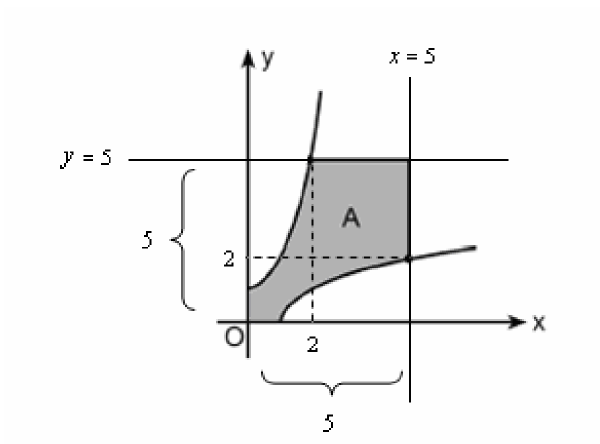
$\int (\arcsin x)^2 \, dx = \int u^2 . \cos u \, du$ elde edilir.

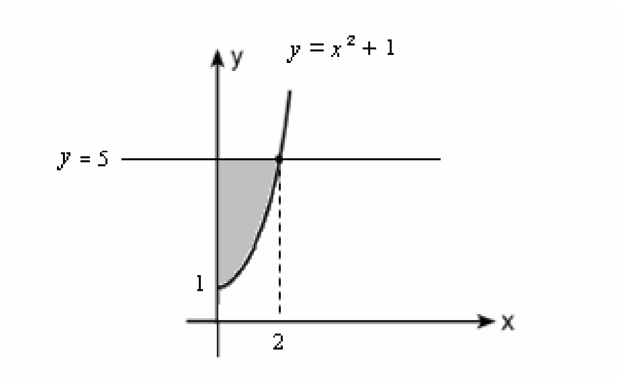
49. Birinci bölgede; koordinat eksenleri, $x = 5$, $y = 5$ doğruları ve

$y = x^2 + 1$, $x = y^2 + 1$ eğrileri arasında kalan A bölgesi aşağıda verilmiştir.



A bölgesinin alanı kaç birim karedir?





$y = 5$ doğrusu ile $y = x^2 + 1$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanı :

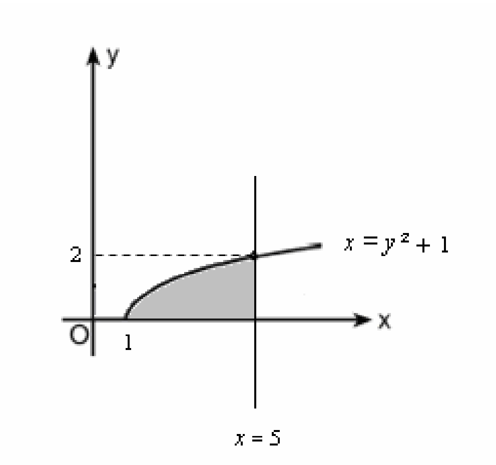
$$\text{Boyalı alan} = \int_0^2 [5 - (x^2 + 1)]\,dx$$

$$= \int_0^2 (4 - x^2)\,dx$$

$$= \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \left(4.2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4.0 - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{3}$$



$x = 5$ doğrusu ile $x = y^2 + 1$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanı :

$$\text{Boyalı alan} = \int_0^2 [5 - (y^2 + 1)]\,dy$$

$$= \int_0^2 (4 - y^2)\,dy$$

$$= \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \left(4.2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4.0 - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{3}$$

Buna göre

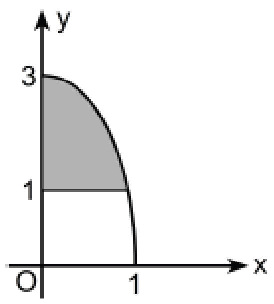
Alan(A) = Karenin alanı – Boş alanların toplamı

Alan(A) = $5.5 - \left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3}\right)$

Alan(A) = $25 - \frac{32}{3}$

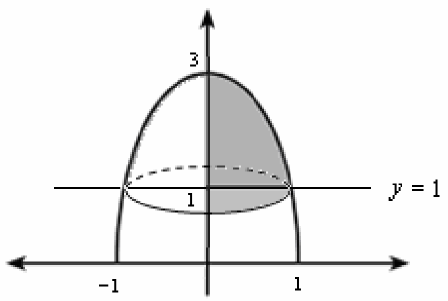
Alan(A) = $\frac{43}{3}$ bulunur.

50.



Birinci bölgede; y ekseni, $y = 1$ doğrusu ve $9x^2 + y^2 = 9$ elipsi arasında kalan bölge y ekseni etrafında 360° döndürülüyor.

Elde edilen dönel cismin hacmi kaç birim küptür?



$V = \pi.\int_1^3 x^2\,dy$ olduğuna göre,

$$9x^2 + y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{9 - y^2}{9}$$

$$V = \pi.\int_1^3 \left(\frac{9 - y^2}{9}\right) dy \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{9}.\int_1^3 (9 - y^2)\,dy$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{9}.\left[\left(9y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^3\right]$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{9}.\left[\left(9.3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(9.1 - \frac{1^3}{3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{9}.\left[18 - \frac{26}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{9}.\left[\frac{28}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{28.\pi}{27}$$ elde edilir.

Adnan ÇAPRAZ

adnancapraz@yahoo.com

AMASYA