

Öğrenci Seçme Sınavı (Öss) / 18 Haziran 2006

Matematik II Soruları ve Çözümleri

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 3 & , x = 0 \end{cases}$ ise fonksiyonu için,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$ ve $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b$ olduğuna göre, $a - b$ kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm 1

$\frac{|x|}{x}$ için, $x > 0 \Rightarrow \frac{x}{x} = 1$ ve $x < 0 \Rightarrow \frac{-x}{x} = -1$ olur.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$

$a - b = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

2. $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$ olduğuna göre, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ kaçtır ?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm 2

$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \cdot [1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n]$

$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

Not :

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Not :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$$= \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & , \quad n = m \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad n < m \quad \text{ise} \\ +\infty \quad \text{veya} \quad -\infty & , \quad n > m \end{cases}$$

I – Pay ve paydanın dereceleri eşitse en büyük dereceli terimlerin katsayılarının oranı limittir.

II – Paydanın derecesi büyükse limit sıfırdır.

III – Payın derecesi büyükse limit $+\infty$ veya $-\infty$ dur.

3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ her noktada türevli bir fonksiyon ve $f'(1) = 3$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-3h)}{h} \text{ kaçtır ?}$$

A) 15 B) 12 C) 9 D) 6 E) 3

Çözüm 3

I. Yol

Türevin tanımından yola çıkarsak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h + x_0) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2h) - f(1 - 3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(1 + 2h) - f(1 - 3h)] + (f(1) - f(1))}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(1 - 3h) + f(1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2h) - f(1)}{2h} \cdot 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - 3h) - f(1)}{(-3)h} \cdot (-3)$$

$$f'(1) \cdot 2 - f'(1) \cdot (-3) = 5 \cdot f'(1) = 5 \cdot 3 = 15$$

II. Yol

Değişken h olduğundan h'a göre türevleri alınır.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2h) - f(1 - 3h)}{h} = \frac{f(1) - f(1)}{0} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği vardır.}$$

L' Hospital uygulanırsa,

$$\frac{f'(1) \cdot 2 - f'(1) \cdot (-3)}{1} = 5 \cdot f'(1) = 5 \cdot 3 = 15 \text{ elde edilir.}$$

Not : Türev Kavramı

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ olsun.

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ limitine (varsa) f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir ve

$f'(x_0)$ ile gösterilir.

Not :

$$x - x_0 = h \Rightarrow x = x_0 + h$$

Bu durumda $x \rightarrow x_0 \Rightarrow h = 0$ olur.

$$\text{Bu nedenle } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ olur.}$$

Not : L' Hospital Kuralı

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ limitinde } \frac{0}{0} \text{ veya } \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği varsa, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ olur.}$$

4. $P(x)$ polinom fonksiyonunun türevi $P'(x)$ ve

$P(x) - P'(x) = 2x^2 + 3x - 1$ olduğuna göre, $P(x)$ in katsayılarının toplamı kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Çözüm 4

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ olsun.}$$

$$P'(x) = 2ax + b \text{ olur.}$$

$$P(x) - P'(x) = 2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow (ax^2 + bx + c) - (2ax + b) = 2x^2 + 3x - 1 \text{ olacağından,}$$

$a = 2$, $b = 7$, $c = 6$ bulunur.

O zaman $P(x) = 2x^2 + 7x + 6$ olur.

$$P(x) \text{ in katsayılarının toplamı : } P(1) = 2.1^2 + 7.1 + 6 = 15$$

5. $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5$ fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde azalandır ?

A) $(-\frac{3}{2}, -1)$ B) $(-1, -\frac{1}{2})$ C) $(-\frac{1}{2}, 0)$ D) $(0, \frac{1}{2})$ E) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

Çözüm 5

$f(x)$ 'in azalan olması için, $f'(x) < 0$ olmalıdır.

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5$$

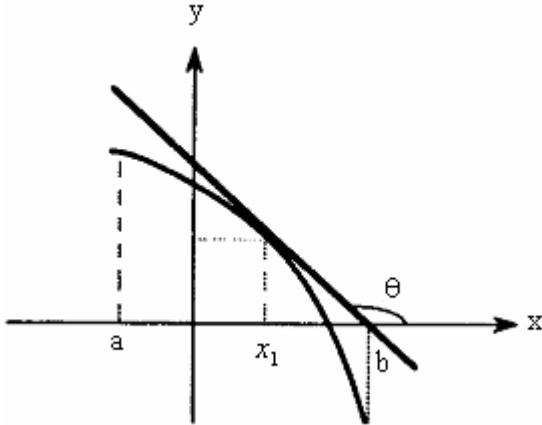
$$f'(x) = 2x^2 - x < 0 \Rightarrow x.(2x - 1) < 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ve } x_2 = \frac{1}{2}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	
x	-----0+++++	+++++	
2x - 1	-----	-----0+++++	
x.(2x - 1)	+++++	-----	+++++

$(0, \frac{1}{2})$ için fonksiyon azalan olur.

Not : Azalan Fonksiyon

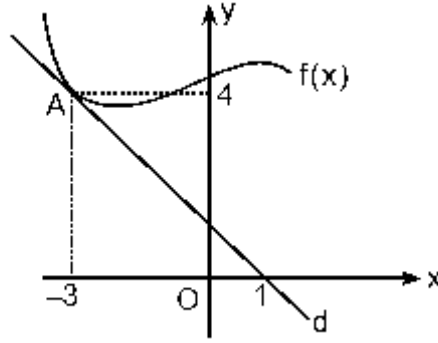
$\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında azalandır.



(a, b) aralığında azalan f fonksiyonunun bu aralığın her noktasındaki teğetinin eğim açısı geniş açıdır. Geniş açıların tanjantları negatif olduğunda her noktadaki türevde negatiftir.

$$m = \tan\theta = f'(x_1) < 0 \text{ olur.}$$

6.



Şekildeki d doğrusu, $f(x)$ fonksiyonunun grafiğine A noktasında teğettir.

$h(x) = x \cdot f(x)$ olduğuna göre, $h'(-3)$ kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 7

Çözüm 6

$$h(x) = x \cdot f(x) \Rightarrow h'(x) = 1 \cdot f(x) + f'(x) \cdot x = f(x) + f'(x) \cdot x \text{ olur.}$$

Türevin geometrik yorumuna göre,

Fonksiyonun bir noktadaki türevi o noktadaki teğetin eğimine eşittir.

d doğrusunun denklemi (iki noktası bilinen doğru denklemi) $\Rightarrow (1, 0)$ ve $(-3, 4)$

$$\Rightarrow \frac{y-0}{4-0} = \frac{x-1}{-3-1} \Rightarrow y = -x + 1 \text{ olur.}$$

Eğimi $= -1 = f'(-3)$ olur.

$$h'(-3) = f(-3) + f'(-3) \cdot (-3) = 4 + (-1) \cdot (-3) = 4 + 3 = 7$$

Not : İki noktası bilinen doğru denklemi

$$A(x_1, y_1) \text{ ve } B(x_2, y_2) \Rightarrow \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

Not : İki noktası bilinen doğrunun eğimi

$$A(x_1, y_1) \text{ ve } B(x_2, y_2) \Rightarrow m = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

7. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + \cos x).dx$ integralinde $t = \pi - x$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integrallerden

hangisi elde edilir?

A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + \cos t).dt$ B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - \cos t).dt$ C) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin t - \cos t).dt$

D) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos t - \sin t).dt$ E) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\sin t - \cos t).dt$

Çözüm 7

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + \cos x) dx$ integralinde $t = \pi - x$ dönüşümü yapılırsa

$$t = \pi - x \Rightarrow x = \pi - t \text{ (türevini alırsak)} \Rightarrow dx = -dt$$

$$x = \pi \text{ için } t = \pi - \pi = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ için } t = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin(\pi - t) + \cos(\pi - t))(-dt) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin t - \cos t)(-dt)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin t + \cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - \cos t) dt$$

8. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her noktada türevli ve $f'(x) = x + 1$, $f(2) = -1$ olduğuna göre, $f(0)$ kaçtır?

A) -5 B) -4 C) -2 D) -1 E) 0

Çözüm 8

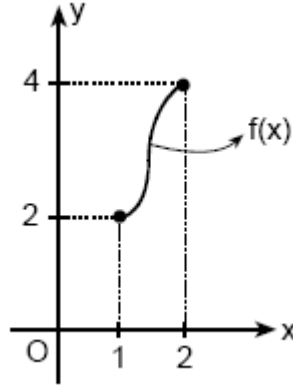
$f'(x) = x + 1 \Rightarrow$ her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\int f'(x) = \int x + 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + x + c \text{ olur.}$$

$$f(2) = -1 \Rightarrow x = 2 \text{ için, } f(2) = \frac{2^2}{2} + 2 + c = -1 \Rightarrow c = -5$$

$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 5$ olduğuna göre, $f(0) = -5$ bulunur.

9.

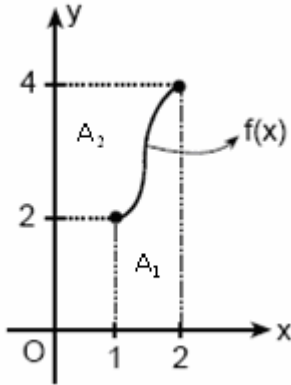


Şekilde grafiği verilen bire bir ve örten $f : [1, 2] \rightarrow [2, 4]$ fonksiyonunun tersi f^{-1} dir.

Buna göre, $\int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f^{-1}(x) dx$ toplamı kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm 9



$$\int_1^2 f(x) dx = A_1 \quad \text{ve} \quad \int_2^4 f^{-1}(x) dx = A_2$$

$$\int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f^{-1}(x) dx = A_1 + A_2$$

$$\Rightarrow 4.2 - 2.1 = 8 - 2 = 6$$

10. $\begin{vmatrix} \log_2 8 & \log_4 5 \\ \log_5 4 & \frac{1}{\log_{27} 3} \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 6 E) 5

Çözüm 10

$$\begin{vmatrix} \log_2 8 & \log_4 5 \\ \log_5 4 & \frac{1}{\log_{27} 3} \end{vmatrix}$$

$$= \log_2 8 \cdot \frac{1}{\log_{27} 3} - \log_5 4 \cdot \log_4 5 = \log_2 2^3 \cdot \frac{1}{\log_{3^3} 3} - 1 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 9 - 1 = 8$$

11. $\left(\frac{x}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right) : \left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x}\right)$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) -1 C) x D) 1-x E) 1+x

Çözüm 11

$$\left(\frac{x(1-x) - (1+x)}{(1+x)(1-x)}\right) : \left(\frac{(1-x) + x(1+x)}{(1+x)(1-x)}\right) = \left(\frac{-x^2-1}{(1+x)(1-x)}\right) \cdot \left(\frac{(1+x)(1-x)}{1+x^2}\right) = -1$$

12. $\frac{y^3 + 27}{y^2 - 2y - 3} \cdot \frac{(y - 3)(y^2 - 1)}{y^2 - 3y + 9}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden

hangisidir?

A) $(y + 3)(y - 1)$ B) $(y + 3)(y - 2)$ C) $(y + 1)(y - 3)$

D) $(y - 1)(y - 2)$ E) $(y - 1)(y - 3)$

Çözüm 12

$$\frac{(y + 3)(y^2 - 3y + 9)}{(y - 3)(y + 1)} \cdot \frac{(y - 3)(y - 1)(y + 1)}{y^2 - 3y + 9} = (y + 3)(y - 1)$$

13. $|z| + z = 3 - 2i$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{5} - 2i$ B) $\frac{5}{6} - 2i$ C) $\frac{3}{4} + 2i$ D) $\frac{2}{3} - 3i$ E) $\frac{3}{5} + 3i$

Çözüm 13

$z = x + iy$ olsun.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ olduğuna göre,}$$

$$|z| + z = 3 - 2i \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 3 - 2i \Rightarrow y = -2 \text{ olur.}$$

$$\sqrt{x^2 + (-2)^2} + x = 3 \Rightarrow x^2 + 4 = (3 - x)^2 \Rightarrow x = \frac{5}{6} \text{ bulunur.}$$

$$z = x + iy = \frac{5}{6} - 2i \text{ elde edilir.}$$

14. Aşağıdaki tabloyla değişmeli olmayan $(G, *)$ grubu verilmiştir.

(Örneğin, bu grupta $c * d = e$, $d * c = f$ dir.)

*	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	a	f	d	e
c	c	a	b	e	f	d
d	d	e	f	a	b	c
e	e	f	d	c	a	b
f	f	d	e	b	c	a

Buna göre, $b * (x * c) = d$ eşitliğini sağlayan x elemanı aşağıdakilerden hangisidir ?

- A) f B) e C) d D) c E) b

Çözüm 14

*	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	a	f	d	e
c	c	a	b	e	f	d
d	d	e	f	a	b	c
e	e	f	d	c	a	b
f	f	d	e	b	c	a

\Rightarrow * işleminin etkisiz (birim) elemanı a 'dır.

$b * (x * c) = d$ eşitliğinde, $(x * c) = m$ olsun.

$$b * m = d \Rightarrow b^{-1} * b * m = b^{-1} * d \Rightarrow m = b^{-1} * d$$

$$b^{-1} * b = a \Rightarrow b^{-1} = c$$

$$m = c * d = e \Rightarrow m = e \text{ olur.}$$

$$x * c = m \Rightarrow x * c * c^{-1} = m * c^{-1} \Rightarrow x = e * c^{-1}$$

$$c^{-1} * c = a \Rightarrow c^{-1} = b \text{ olur.}$$

$$x = e * b \Rightarrow x = f \text{ bulunur.}$$

15. A boş olmayan bir küme olmak üzere, A dan A ya f ve g fonksiyonları tanımlanmıştır.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ile verilen $(f \circ g)$ bileşke fonksiyonu bire bir ise aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- A) f örtendir. B) g örtendir. C) f bire birdir. D) g bire birdir. E) $(g \circ f)$ bire birdir.

Çözüm 15

Farklı bir $h(x)$ fonksiyonu alalım.

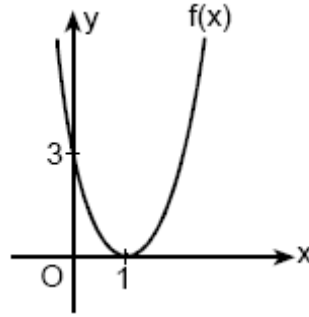
$$h(x_1) = h(x_2) \quad 1 - 1 \text{ olması için } x_1 = x_2 \Rightarrow 1 - 1 \text{ olmalıdır.}$$

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \quad 1 - 1 \text{ olması için } x_1 = x_2 \Rightarrow 1 - 1 \text{ olmalıdır.}$$

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \quad 1 - 1 \text{ olması için } g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow 1 - 1 \text{ olmalıdır.}$$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ile verilen $(f \circ g)$ bileşke fonksiyonu bire bir ise $g(x)$ de bire bir'dir.

16.



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği, şekildeki gibi, Ox eksenine $(1, 0)$ noktasında teğet olan ve $(0, 3)$ noktasından geçen parboldür.

Buna göre, $f(3)$ kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 12

Çözüm 16

Parabolün denklemi : $f(x) = a.(x - r)^2 + k$ biçimindedir.

Tepe noktası : $(r, k) = (1, 0)$ ise

$$y = a.(x - 1)^2 + 0 \Rightarrow y = a.(x - 1)^2$$

Parabol $(0, 3)$ noktasından geçtiğine göre,

$$3 = a.(0 - 1)^2 \Rightarrow a = 3 \text{ olur.}$$

$$y = a.(x - 1)^2 \Rightarrow y = 3.(x - 1)^2 \Rightarrow y = f(3) = 3.(3 - 1)^2 = 3.4 = 12$$

Not : İkinci dereceden fonksiyonlar

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar , $f(x) = a.(x - r)^2$ fonksiyonunun grafiği :

I) $r > 0$ ise $f(x) = ax^2$ fonksiyonunun grafiği $x -$ ekseninin pozitif yönünde r birim ötelenir.

II) $r < 0$ ise $f(x) = ax^2$ fonksiyonunun grafiği $x -$ ekseninin negatif yönünde $|r|$ birim ötelenir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar , $f(x) = a.(x - r)^2 + k$ fonksiyonunun grafiği :

I) $k > 0$ ise $f(x) = a.(x - r)^2$ fonksiyonunun grafiği $y -$ ekseninin pozitif yönünde k birim ötelenir.

II) $k < 0$ ise $f(x) = a.(x - r)^2$ fonksiyonunun grafiği $y -$ ekseninin negatif yönünde $|k|$ birim ötelenir.

Not :

I) Parabolün en alt ya da en üst noktasına tepe noktası denir.

(r, k) parabolün tepe noktasının koordinatlarıdır.

II) r tepe noktasının apsisi olup eğri $x = r$ doğrusuna göre simetriktir.

Yani $x = r$ doğrusu parabolün simetri eksenidir.

III) $a > 0$ ise $f(x)$ fonksiyonunun en küçük değeri : k ,

$a < 0$ ise $f(x)$ fonksiyonunun en büyük değeri : k dır.

17. $(1 - m)x^2 + 4x + m^2 - 4 = 0$ denkleminin biri pozitif, diğeri negatif iki gerçel kökü varsa m nin alabileceği değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir ?

A) $(1, \infty)$

B) $(-2, 2)$

C) $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

D) $(-2, 1) \cup (2, \infty)$

E) $(-2, 0) \cup (1, \infty)$

Çözüm 17

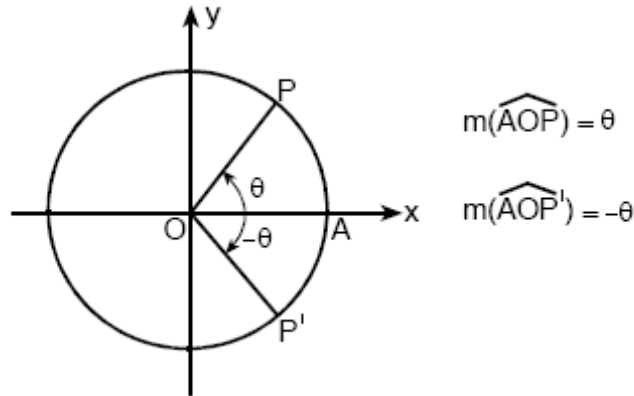
Denklemin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 4}{1 - m} < 0 \Rightarrow m_1 = 2, m_2 = -2, m_3 = 1$$

m		-2		1		2				
$m^2 - 4$	+	+	+	0	- - - - -	0	+	+	+	+
$1 - m$	+	+	+	+	+	+	+	0	- - - - -	- - - - -
$\frac{m^2 - 4}{1 - m}$	+	+	+	- - - - -	- - - - -	+	+	+	+	- - - - -

$\Rightarrow (-2, 1) \cup (2, \infty)$ elde edilir.

18.



Şekildeki O merkezli birim çember üzerindeki P ve P' noktaları Ox eksenine göre birbirinin simetriğidir.

Buna göre, P' noktası aşağıdakilerden hangisiyle ifade edilemez?

- A) $(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$ B) $(\cos(-\theta), \sin\theta)$ C) $(\cos\theta, -\sin\theta)$
 D) $(\cos\theta, \sin(2\pi - \theta))$ E) $(\cos(2\pi - \theta), -\sin\theta)$

Çözüm 18

$$P'(\cos(-\theta), \sin(-\theta)) = P'(\cos\theta, -\sin\theta)$$

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$$

$$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \Rightarrow (\cos(-\theta), \sin\theta) \text{ olamaz.}$$

19. $\frac{\sin 2a}{1 - \cos 2a}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir ?

A) $\sin a$ B) $\cos a$ C) $\tan a$ D) $\cot a$ E) $\sin a + \cos a$

Çözüm 19

$$\frac{\sin 2a}{1 - \cos 2a} = \frac{2 \sin a \cdot \cos a}{1 - (1 - 2 \sin^2 a)} = \frac{2 \sin a \cdot \cos a}{2 \sin^2 a} = \frac{2 \cos a}{2 \sin a} = \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a$$

Not : Yarım Açılış Formülleri

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

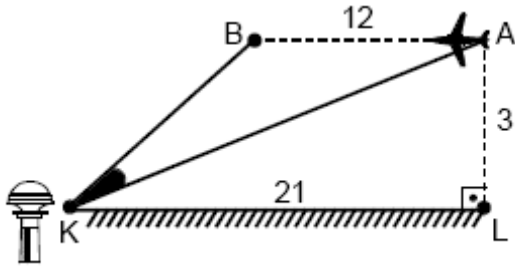
$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2 \cdot \cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \cdot \sin^2 a$$

20.



$$AL \perp KL$$

$$BA \parallel KL$$

$$|AL| = 3 \text{ km}$$

$$|BA| = 12 \text{ km}$$

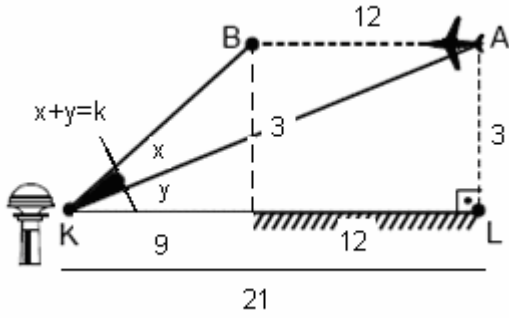
$$|KL| = 21 \text{ km}$$

K noktasındaki kontrol kulesinde bulunan bir görevli, yerden 3 km yükseklikte yere paralel uçan bir uçağın, A noktasından B noktasına kadar 12 km lik hareketini radarla izliyor.

A noktasının yerdeki dik izdüşümü L noktası ve $|KL| = 21 \text{ km}$ olduğuna göre, radarın taradığı AKB açısının tanjantı kaçtır?

- A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{2}{11}$ D) $\frac{3}{13}$ E) $\frac{7}{17}$

Çözüm 20



$$\tan x = ? \Rightarrow x = k - y$$

$$\tan x = \tan(k - y) = \frac{\tan k - \tan y}{1 + \tan k \cdot \tan y}$$

$$\Rightarrow \tan k = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \tan y = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$\tan x = \tan(k - y) = \frac{\tan k - \tan y}{1 + \tan k \cdot \tan y} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}} = \frac{\frac{4}{21}}{\frac{22}{21}} = \frac{4}{22} = \frac{2}{11}$$

$$\text{Not : } \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

21. $f : (\frac{-1}{3}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3(3x + 1)$ ile tanımlanıyor.

Buna göre, ters fonksiyonu belirten $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f^{-1}(x) = 3^x$ B) $f^{-1}(x) = 3^x + 1$ C) $f^{-1}(x) = \log(3x + 1)$

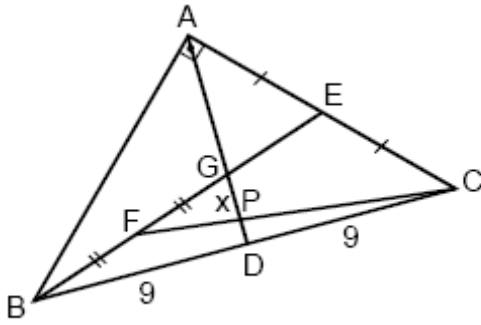
D) $f^{-1}(x) = \frac{3^x - 1}{3}$ E) $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$

Çözüm 21

$$y = f(x) = \log_3(3x + 1) \Rightarrow 3^y = 3x + 1 \Rightarrow 3x = 3^y - 1 \Rightarrow x = \frac{3^y - 1}{3}$$

$$x \leftrightarrow y \leftrightarrow f^{-1}(x) \Rightarrow y = \frac{3^x - 1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3^x - 1}{3}$$

22.



ABC bir dik üçgen

$$m(\text{BAC}) = 90$$

$$|AE| = |EC|$$

$$|BD| = |DC| = 9 \text{ cm}$$

$$|BF| = |FG|$$

$$|GP| = x$$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç cm dir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

Çözüm 22

ABC üçgeninde, [AD] ve [BE] kenarortay oldukları için G noktası ağırlık merkezidir.

Bir dik üçgende hipotenüze ait kenarortayın uzunluğu, hipotenüs uzunluğunun yarısına eşit

olduğuna göre, $|AD| = \frac{|BC|}{2} = 9$ cm dir.

Ayrıca $|BG| = 2|GE|$ olduğu için, $|BF| = |FG| = |GE|$ olur.

ECF üçgeninde Menelaüs Teoremine göre,

$$\frac{|AE|}{|AC|} \cdot \frac{|CP|}{|PF|} \cdot \frac{|FG|}{|GE|} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{|CP|}{|PF|} \cdot \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow |CP| = 2|PF|$$

Aynı şekilde PCA üçgeninde Menelaüs Teoremine göre,

$$\frac{|FP|}{|FC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AG|}{|GP|} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{|AG|}{|GP|} = 1 \Rightarrow |AG| = 3|GP|$$

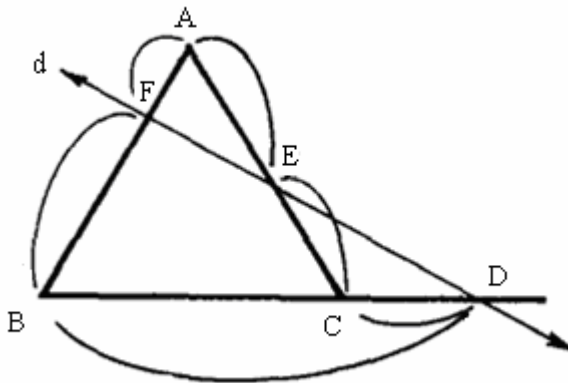
$$|AD| = 9 \Rightarrow G \text{ noktası ağırlık merkezi} \Rightarrow 2|GD| = |AG| \Rightarrow |AG| = 6$$

$$|AG| = 6 \Rightarrow |AG| = 3|GP| \text{ olduğundan, } \Rightarrow |GP| = 2 \text{ cm bulunur.}$$

Not : Menelaüs Teoremi

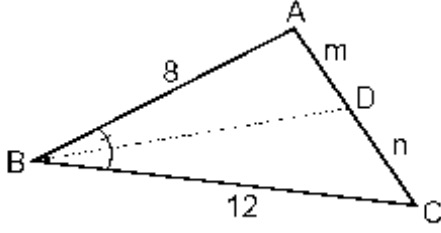
Bir doğruyu, ABC üçgeninin iki kenarını ve üçüncü kenarın uzantısını şekildeki gibi

D , E , F noktalarında kesiyorsa



$$\Rightarrow \frac{|DC|}{|DB|} \cdot \frac{|BF|}{|FA|} \cdot \frac{|AE|}{|EC|} = 1 \text{ dir.}$$

23.



ABC bir üçgen

[BD] açıortay

$$|AB| = 8 \text{ cm}$$

$$|BC| = 12 \text{ cm}$$

$$|AD| = m \text{ cm}$$

$$|DC| = n \text{ cm}$$

Yukarıdaki şekilde m ve n birer tamsayı olduğuna göre, ABC üçgeninin çevre uzunluğu en çok kaç cm olabilir ?

- A) 28 B) 32 C) 35 D) 38 E) 40

Çözüm 23

Açıortay teoremine göre,

$$\frac{8}{12} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{3} \Rightarrow m = 2k \text{ ve } n = 3k \text{ olur.}$$

$$|12 - 8| < |AC| < 12 + 8 \Rightarrow |AC| = m + n < 8 + 12 \text{ olur.}$$

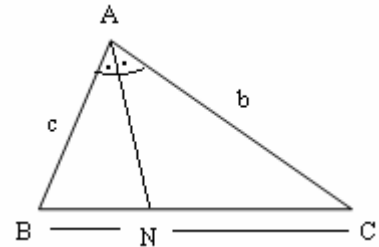
$$2k + 3k < 20 \Rightarrow 5k < 20 \Rightarrow k < 4 \Rightarrow \text{Bu durumda en fazla } k = 3 \text{ alınabilir.}$$

$$\text{Üçgenin çevresi, } 8 + 12 + 5k = 8 + 12 + 5 \cdot 3 = 8 + 12 + 15 = 35 \text{ olur.}$$

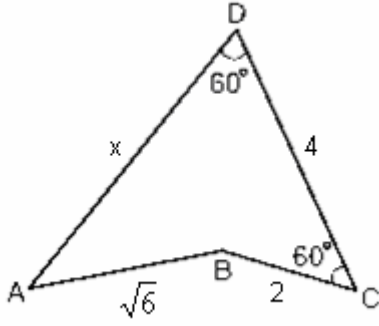
Not : Açıortay Teoremi

Bir üçgende bir açının açıortayı karşı kenarı diğer kenarlar oranında böler.

$$\text{AN iç açıortay ise, } \frac{|NB|}{|NC|} = \frac{c}{b}$$



24.



$$m(\angle ADC) = m(\angle BCD) = 60$$

$$|AB| = \sqrt{6} \text{ cm}$$

$$|BC| = 2 \text{ cm}$$

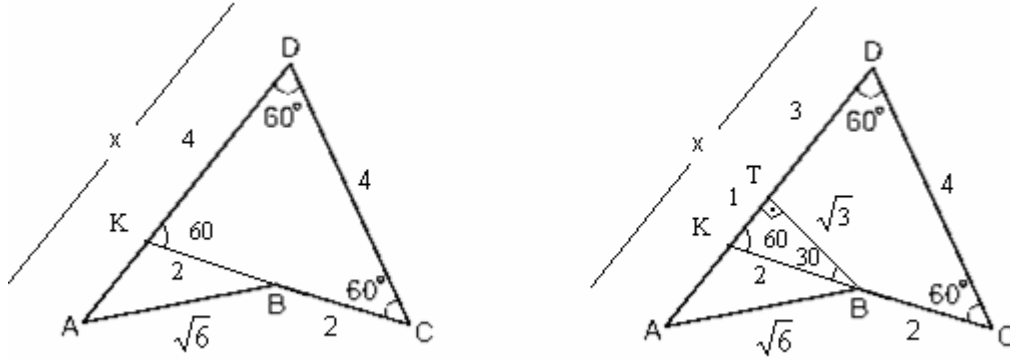
$$|CD| = 4 \text{ cm}$$

$$|AD| = x$$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç cm dir?

- A) 5 B) 6 C) $6 - \sqrt{3}$ D) $2 + \sqrt{6}$ E) $3 + \sqrt{3}$

Çözüm 24



Şekildeki gibi [BC] uzatılırsa DKC eşkenar üçgeni oluşur. $\Rightarrow |KB| = 2$

B noktasından [DK] ya dik çizilirse (KTB) üçgeni, 30 – 60 – 90 dik üçgeni olur.

$$|KB| = 2 \Rightarrow |KT| = 1 \text{ ve } |TB| = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

BTA dik üçgeninde,

$$|AB| = \sqrt{6} \text{ ve } |TB| = \sqrt{3} \Rightarrow |AT|^2 + |TB|^2 = |AB|^2 \text{ (pisagor)}$$

$$|AT|^2 + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 \Rightarrow |AT| = \sqrt{3} \Rightarrow |AD| = x = 3 + \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

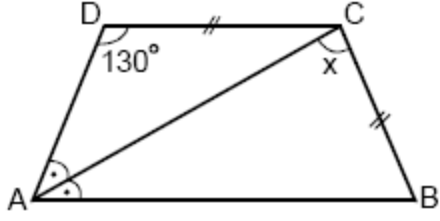
Not : Dik üçgen özellikleri

Bir dar açının ölçüsü 30° olan dik üçgende,

30° karşısındaki kenarın uzunluğu hipotenüsün yarısına ,

60° karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katına eşittir.

25.

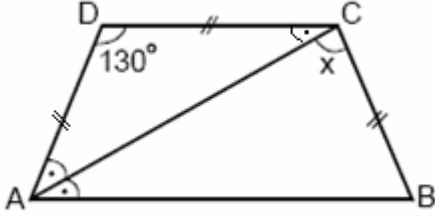


$AB \parallel DC$
[AC] açıortay
 $|DC| = |BC|$
 $m(\angle ADC) = 130$
 $m(\angle ACB) = x$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?

- A) 105 B) 115 C) 125 D) 130 E) 135

Çözüm 25



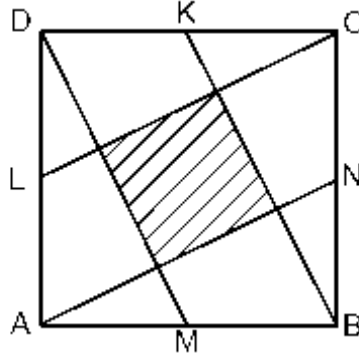
ADC ikizkenar üçgen (iç – ters açılı)

$$s(\angle BAC) = s(\angle DCA) = \frac{180 - 130}{2} = 25$$

ADCB ikizkenar yamuk olduğundan, $s(\angle ADC) = s(\angle DCB) = 130$ olacağından,

$$25 + x = 130 \Rightarrow x = 105$$

26.

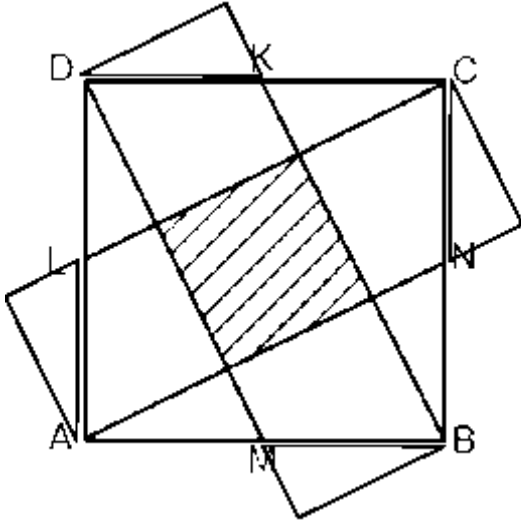


Şekildeki ABCD karesinin kenarları üzerindeki K , L , M , N noktalarının her biri, üzerinde bulunduğu kenarın orta noktasıdır.

$A(ABCD) = 4 br^2$ olduğuna göre, taralı alan kaç br^2 dir ?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{5}$

Çözüm 26

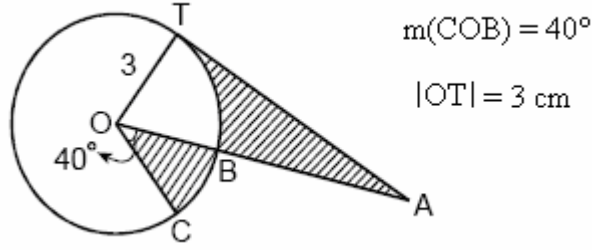


Şekilde de görüleceği üzere ABCD karesinin alanı 5 tane taralı küçük karenin alanına eşittir.

Dolayısıyla, $4 = 5 \cdot \text{taralı alan}$

$$\text{Taralı alan} = \frac{4}{5} \text{ olur.}$$

27.



Şekildeki AT doğrusu O merkezli çembere T noktasında teğettir ve $|AT|$ uzunluğu TBC yayının uzunluğuna eşittir.

Buna göre, taralı alanların toplamı kaç cm^2 dir ?

- A) 8π B) 6π C) 5π D) 4π E) 2π

Çözüm 27

AT doğrusu O merkezli çembere T noktasında teğet olduğuna göre, $AT \perp OT$

$$\text{alan(OCB)} = \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{40}{360}$$

$$\text{alan(COT)} = \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{(\overline{TBC})}{360}$$

$$\text{alan(AOT)} = \frac{3 \cdot |AT|}{2}$$

$|AT|$ uzunluğu TBC yayının uzunluğuna eşit olduğuna göre,

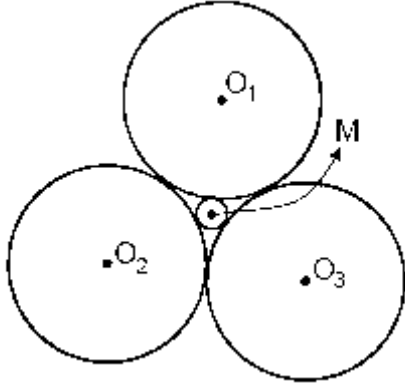
$$|AT| = |\overline{TBC}| = 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{(\overline{TBC})}{360}$$

taralı alan = alan(AOT) – alan(TOB) + alan(OCB)

$$\text{taralı alan} = \frac{3 \cdot |AT|}{2} - (\pi \cdot 3^2 \cdot \frac{(\overline{TBC})}{360} - \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{40}{360}) + \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{40}{360}$$

$$\text{taralı alan} = \frac{3 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{(\overline{TBC})}{360}}{2} - 9\pi \frac{(\overline{TBC})}{360} + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{40}{360} = 2\pi$$

28.

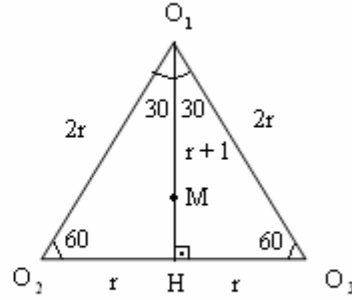
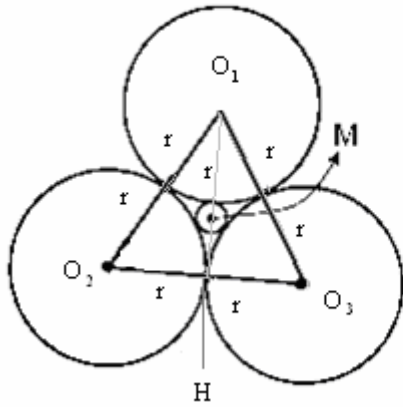


O_1 , O_2 , O_3 ve M merkezli çemberler birbirlerine şekildeki gibi teğettir.

O_1 , O_2 ve O_3 merkezli çemberlerin yarıçapları r cm, M merkezli çemberin yarıçapı da 1 cm olduğuna göre, r kaçtır?

- A) $\sqrt{3}$ B) $1 + \sqrt{3}$ C) $2 + 2\sqrt{3}$ D) $3 + 2\sqrt{3}$ E) $3 + 3\sqrt{3}$

Çözüm 28



Şekildeki gibi merkezler birleştirildiğinde, bir kenarı $2r$ olan $(O_1 O_2 O_3)$ eşkenar üçgeni meydana gelir.

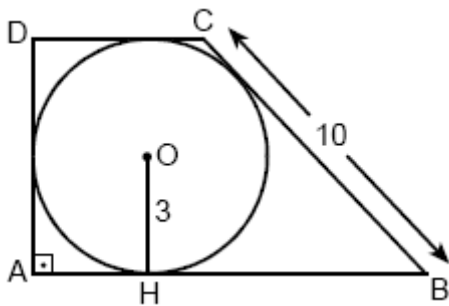
$$\text{Eşkenar üçgenin yüksekliği} = |O_1 H| = \frac{2r \cdot \sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

$$M \text{ noktası bu üçgenin ağırlık merkezi} \Rightarrow |O_1 M| = r + 1$$

$$\frac{|O_1 M|}{|O_1 H|} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{r+1}{r\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\sqrt{3}r = 3r + 3 \Rightarrow r(2\sqrt{3} - 3) = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{3} - 3}$$

$$r = \frac{3}{2\sqrt{3} - 3} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{3} + 3} \right) = \frac{3 \cdot (2\sqrt{3} + 3)}{12 - 9} = \frac{3 \cdot (2\sqrt{3} + 3)}{3} = 3 + 2\sqrt{3}$$

29.



ABCD, O merkezli çemberin teğetler dörtgeni

AB // DC

DA \perp AB

|BC| = 10 cm

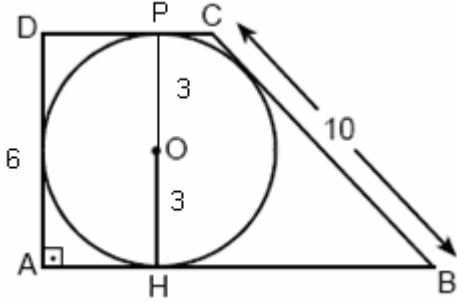
|OH| = 3 cm

Yukarıdaki verilere göre, ABCD teğetler dörtgeninin alanı kaç cm^2 dir?

- A) 50 B) 48 C) 46 D) 44 E) 42

Çözüm 29

I. Yol



O merkezli çember [DC] ye P de teğet olduğuna göre, $|OP| = 3$ cm olur.

Yarıçap teğete değme noktasında dik olacağından,

$[PH] \perp [AB]$ ve $[PH] \perp [DC]$ dir.

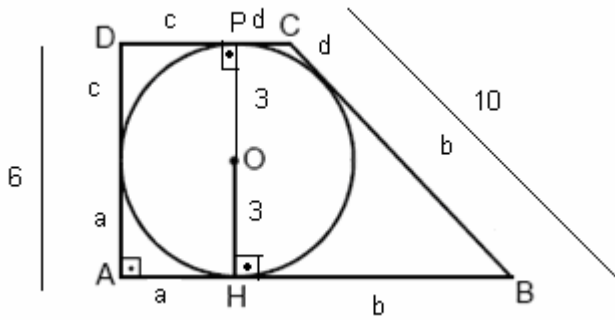
Bu durumda $|AD| = |PH| = 6$ olur.

Teğetler dörtgeninin karşılıklı kenar uzunluklarının toplamı birbirine eşit olduğu için,

$$|AB| + |DC| = |AD| + |BC| = 10 + 6 = 16$$

$$\text{Alan}(ABCD) = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot |AD| = \frac{16}{2} \cdot 6 = 48$$

II. Yol



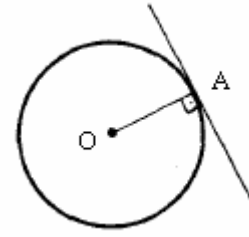
$$a + c = 6$$

$$b + d = 10$$

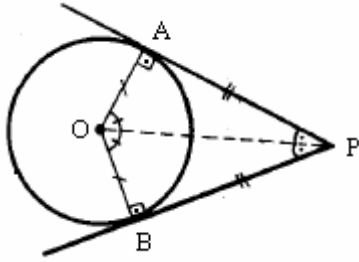
$$\text{Alan}(ABCD) = \frac{(a + b) + (c + d)}{2} \cdot (a + c) \quad \text{Alan}(ABCD) = \frac{16}{2} \cdot 6 = 48 \text{ elde edilir.}$$

Not :

Yarıçap teğete değme noktasında diktir.



Not :

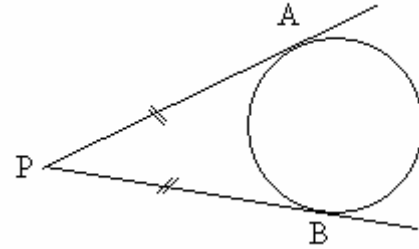


[OP] açıortaydır.

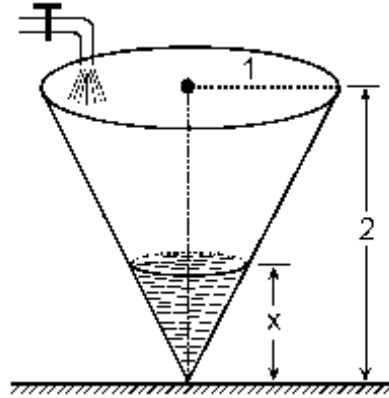
Not :

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşittir.

$$|PA| = |PB|$$



30.

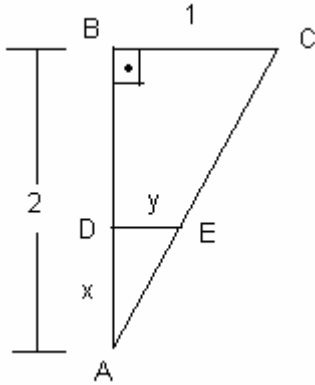


Şekildeki gibi, taban yarıçapı 1 metre, yüksekliği 2 metre olan dik koni biçimindeki bir su deposuna bir musluktan sabit hızla su akıtılıyor.

Depoda biriken suyun derinliği x metre olduğunda, depoda biriken suyun hacmi x türünden kaç metreküp olur ?

- A) $\frac{\pi \cdot x^3}{12}$ B) $\frac{\pi \cdot x^3}{9}$ C) $\frac{\pi \cdot x^3}{6}$ D) $\frac{\pi \cdot x^3}{4}$ E) $\frac{\pi \cdot x^3}{3}$

Çözüm 30



$$AED \cong ACB \Rightarrow \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|ED|}{|CB|}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$\text{Depoda biriken suyun hacmi, } v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (y)^2 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot x$$

$$\Rightarrow v = \frac{\pi \cdot x^3}{12} \text{ bulunur.}$$

Adnan ÇAPRAZ

adnancapraz@yahoo.com

AMASYA